微机用于抛物线齿同步带传动强度理论的研究

姜洪源 关 莉 郭建华 陈铁鸣 徐溥滋

(哈尔滨工业大学 150001)

摘要 采用啮合原理与弹性力学复变函数相结合的方法,借助计算机对抛物线齿同步带传动强度
理论进行了系统研究,并将整个计算过程编制成 RHDGRAPH 软件。利用该软件进行了带齿和轮齿及
刀具齿形设计、啮合原理分析、应力和变形计算、刀具可加工最小齿数的确定及加工误差分布计算。
羊镭词 抛物线齿同步带,计算机辅助设计,复变函数法

同步带传动是机械传动中一种崭新的传 动形式,它的优点和特性已逐步被人们所熟 悉。从 80 年代后期开始,在国内外的机械传 动中,同步带传动的应用呈不断上升态势,且 在某些场合有取代齿轮传动和链传动的趋 势^[1,2]。

由于同步带传动是通过带与带轮的啮合 传递运动和动力的,因此齿形设计一直是国 内外学者研究的主要课题之一。在其它条件 相同时,正确的齿形可使同步带传动具有更 高的承载能力和寿命。但正确的齿形不仅应 满足正确啮合的条件,日其受力和应力状态 亦应均匀合理,因此,探索一种计算精度更高 的带齿变形及应力计算方法也是至关重要 的。然而正确合理的齿形是否能够达到理论 分析的效果,与带轮的加工精度是紧密相关 的,而带轮的加工大多是由滚刀滚切完成的, 所以滚刀齿形设计是否合理,所加工的带轮 误差是否在允许的范围之内,也直接影响着 同步带传动性能的发挥。由此可见,长寿命、 高承载能力的同步带传动,是齿形设计、啮合 原理及运动学分析、变形及应力计算、滚刀齿 形设计及加工误差分析等众多因素综合优化 效果的体现。本文旨在以抛物线齿同步带为 例,借助计算机将同步带传动的系统性研究 编制于计算软件 RHDGRAPH 之中,以实现 快捷、精确的设计目的。计算框图如下:



1 基本原理和方法

1.1 复变函数法

复变函数法由 Hirono 首先应用于计算 一半平面域带有一凸起齿状的物体内任一点 处的应力和位移,它利用保角映射函数将凸 起对称齿状映射到另一半平面域内,如图1 所示。同步带由于带基强力层不易变形,故可 视带齿为一半平面域上一凸起物,且邻齿对 其应力变形没有影响。



图 1 抛物线带齿映射函数

当一集中载荷 W 施加于 z=x+iy 平面 齿廓上 Z_0 点时,解析函数 $\varphi(z), \psi(z)$ 表示为

$$\varphi(z) = -\frac{W e^{i\beta}}{2\pi} \log(z - z_0) + \varphi^*(z) \quad (1)$$

$$\psi(z) = \frac{W e^{-i\beta}}{2\pi} \log(z - z_0) + \frac{W e^{i\beta}}{2\pi} \cdot \frac{z_0}{z - z_0} + \psi^*(z) \quad (2)$$

式中 $\varphi^*(z), \psi^*(z)$ 是全纯解析函数, W 是作 用在齿廓边界上 z_0 点处的载荷。 $\varphi(z), \varphi(z)$ 为半平面带有齿状凸起域函数, 将其转换成 一半平面域内 $\zeta = \xi + i\eta$ 解析函数。必须通过 保角映射函数实现, 映射函数形式为

$$z = W(\zeta) = c\zeta + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\xi - ib_k} \quad (3)$$

这里 c, a_k , b_k 是常数,我们通过定义沿半 平面域边界对应参数 t 来表示齿状齿廓(沿 半平面域边界 $\eta=0$, $\xi=t$),将(3)代入(1), (2),则解析函数重写为

$$\varphi(\zeta) = -\frac{W e^{i\beta}}{2\pi} \log(\zeta - \xi_0) - \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{\zeta - ib_k} \cdot \frac{\bar{\varphi}(ib_k)}{\bar{\omega}'(ib_k)}$$
(4)

$$\psi(\zeta) = \frac{W \mathrm{e}^{-i\beta}}{2\pi} \log(\zeta - \xi_0) - \frac{\overline{W}(\xi)}{W'(\xi)} \varphi(\zeta) + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\zeta + ib_k} \cdot \frac{\varphi(-ib_k)}{W'(-ib_k)}$$
(5)

式中 $\hat{\varphi}(ib_k) = x_k - iy_k, \varphi(-ib_k) = x_k + iy_k$ 的计算参见文献^[3]。将上式代入 Kolossov 公 式即可得出应力和位移计算式

$$\sigma_n + \sigma_t = 4Re\left[\frac{\phi'(\zeta)}{\omega'(\xi)}\right]$$
(6)

$$\sigma_n - \sigma_t + 2i\tau_{nt} = \frac{2}{\omega'(\xi)} \cdot$$

$$\left[\overline{\omega}'\left(\xi\right)\left(\frac{\varphi'\left(\zeta\right)}{\omega'\left(\xi\right)}\right)^{2}+\psi'\left(\zeta\right)\right]$$
(7)

$$U + iV = \frac{1 + \nu}{E} \cdot \left[\frac{3 - \nu}{1 + \nu}\varphi(\zeta) - \frac{\omega(\xi)}{\omega'(\xi)}\bar{\varphi}(\zeta) - \bar{\psi}(\zeta)\right]$$
(8)

式(6)—(8)中,σ,为切向应力,σ,为法向 应力,U为x方向位移,V为y方向位移,v 为泊松比。

映射函数曲线轮廓取决于 c,ak,bk 及轮 廓参数 t,而齿廓方程可以沿齿廓 t 写成多项 式组合形式^[3],组合式中每一项都有一个特 殊形式,它们叠加在一起时,就形成一个完整 的映射齿形,使它更精确地近似带齿的齿形。 CPM 法计算结果的准确度就取决于映射函 数与实际带齿间的映射精度。

1.2 运动分析方法

为提高带与轮在完全啮合区域的承载能力,忽略带与轮传动间形成的多边形效应,使 带齿与轮齿在传动中的运动关系近似为齿条 与齿轮间的啮合传动。保证带与轮在传动中 不产生传动干涉,必须有下列条件成立:

(1)带轮齿槽齿廓应包容与带齿共轭的 轮齿齿廓;

(2)与带轮齿槽共轭的计算带齿齿廓应 包容设计带齿齿廓。

由设计带齿与轮齿的齿形,分别求出与 之共轭的共轭齿廓,再根据不产生干涉的啮 合条件,确定带齿与轮齿的齿形参数和侧隙。

坐标变换关系如图 2 所示。 o_2 为带轮中 心, r_2 为节圆半径,P 为节点,M 为 3 个坐标 系中空间一点,L 为 φ_2 所对应的弧长,定坐 标系(x,P,y)以P 为原点,动坐标系(x_1 , o_1 , y_1)与带固联,动坐标系(x_2 , o_2 , y_2)与带轮固 联,且x, x_1 轴重合,带与轮间共轭坐标转换 关系为

$$\begin{bmatrix} x_{1} \\ y_{1} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_{2} & -\sin\varphi_{2} & r_{2}\varphi_{2} \\ \sin\varphi_{2} & \cos\varphi_{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{2} \\ y_{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$
(9)
$$\begin{bmatrix} x_{2} \\ y_{2} \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_{2}\sin\varphi_{2}r_{2}(\sin\varphi_{2} - \varphi_{2}\cos\varphi_{2}) \\ -\sin\varphi_{2}\cos\varphi_{2}r_{2}(\cos\varphi_{2} + \varphi_{2}\sin\varphi_{2}) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1} \\ y_{1} \\ 1 \end{bmatrix}$$
(10)
$$\mathbf{5}\mathbf{\hat{K}}\mathbf{\mathbf{5}}\mathbf{\mathbf{5}}\mathbf{\mathbf{5}}\mathbf{\mathbf{5}}\mathbf{\mathbf{5}}\mathbf{\mathbf{5}}\mathbf{\mathbf{5}}\mathbf{\mathbf{5}}\mathbf{\mathbf{5}} + \mathbf{\mathbf{5}}\mathbf{\mathbf{5}$$

$$\cos\psi = (x_2 \cos\gamma + y_2 \sin\gamma)/r_2$$

与带齿共轭的啮合条件:

$$\varphi_2 = (x_1 + y_1 \operatorname{tg} \gamma_1) / r_2 \qquad (12)$$

· 式中 x₁, y₁ 为带齿廓点坐标, x₂, y₂ 为轮 齿廓点坐标。



图 2 坐标变换关系

1.3 误差分析

模具、带轮的加工通常用滚刀进行。由啮 合原理可知,同一节距某一齿数的模具与带 轮对应一确定的滚刀,但这样既不经济又不 便于管理。用一种刀具加工不同齿数的轮必 定要产生齿形误差,影响传动质量。本文从啮 合原理出发,分析由加工形成误差的带轮与 带作传动时误差对啮合传动的影响,并由此 确定在一定允差条件下刀具可加工的齿数范 围,以确定刀具可加工的最小齿数及最小齿 数内刀具的设计方法。

标准带轮齿数为 z_0 ,由(9)和(11)式即可 确定刀具齿廓,并由(10)和(12)式可计算齿 数 z 的带轮齿廓。令 $r_i = (x_i, y_i), \bar{r} = (\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ 分别为 z_0 和z齿数带轮齿廓坐标, \bar{n} 为 z_0 齿 廓上r,点处法向单位矢量,则z齿数带轮 \bar{r} , 处齿形误差为

$$\delta(z_0, z) = (\bar{r}_i - r_i) \cdot \bar{n} \qquad (13)$$

齿廓最大误差为

$$\delta_{\rm M}(z_0,z) = {\rm Max}[(\bar{r}_i - r_i) \cdot \bar{n}] \quad (14)$$

令与带共轭的轮与齿数为 z 的标准带轮 间最小侧隙为 $\Delta(z)$,与带共轭带轮与有齿形 误差的齿数为 z 的带轮最小侧隙为 $\Delta(z_0, z_1)$,则误差不影响啮合传动的条件为

$$\Delta(z_0,z) - \Delta(z) \ge 0 \tag{15}$$

2 计算机实现的功能

将求解过程编制成 RHDGRAPH 程序。 该软件是由主程序和可直接调用的三个模块 组成。软件具有齿形(带、带轮及刀具的齿 形)设计、传动的啮合原理及运动学分析、应 力和变形计算、刀具可加工最小齿数的确定 及产生的制造误差分析等功能,计算结果输 出采取数值计算结果与图形相结合的模式。

程序的执行顺序如下:

(1)带齿与轮齿齿形的初始设计

初始设计采用键盘和图形模式来实现。 通过键盘输入参数,可以随意修改屏幕上带 与轮齿齿形图形,修改结束后初始设计完成。

(2)用 CPM 法对带齿进行强度计算

带是由模具硫化成型而得,带齿工作齿 廓由齿顶到齿根,齿廓上点坐标根据坐标轴 (o,\bar{x},\bar{y}) 来确定。由于齿形的对称性,映射函 数 y 轴与带齿 \bar{y} 轴相重合,移动 x 轴与保角 映射一致 $(y \rightarrow 0, x \rightarrow \infty)$,移动方法在程序中 已设定。

映射函数是由多组曲线叠加而成,本程 序采用 Powell 法确定映射系,但 Powell 法初 始叠代点的确定将直接影响收敛精度和时 间。本程序采用数值和图形显示模式,并通过 键盘调整多项式系数,以确定初始叠代点。

在齿形逼近过程中,为确保两个齿廓间

距最小,选用合适的优化方法是最重要的。 Powell 法是适合于这一过程的。根据抛物线 同步带齿形特点,两齿廓间距最小,间距 *u* 采 用分段最小平方函数来表示。

 $u = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{m_j} W_j (\bar{x}_j - x_j)^2 + \frac{1}{M} \sum_{j=m_j+1}^{M} W_j (y_j - \bar{y}_j)^2$ 式中 \bar{x}_j, x_j 分别是在 $\bar{y}_j = y_j$ 时齿廓与映射函 数上的坐标值; \bar{y}_j, y_j 分别是在 $\bar{x}_j = x_j$ 时齿 廓与映射函数的坐标值; 常数 M 表示齿廓上 选取的点数; W_j 为安全系数, 以强调特殊齿 廓的重要性, 本文中在齿廓下 2/3 处 $W_j = 2$.

映射函数确定后,即可以计算带齿应力。 为便于计算结果的比较,在距齿根 y=H 处 施加以单位齿宽载荷,β 角为常数。并利用黄 金分割法来确定齿廓上最大弯曲应力值及对 应齿廓上危险截面点的坐标(x,y)。

(3)对带与轮进行传动运动分析

利用啮合原理对带与轮进行啮合传动分 析,分析结果以图形模式输出,以显示带和与 轮共轭的带、轮和与带共轭的轮齿齿廓,或以 曲线形式显示它们之间侧隙分布,用于分析 和比较传动啮合条件。

带齿与轮齿齿形参数的确定是一个重复 设计过程。利用强度计算和啮合传动分析来 确定最终带齿与轮齿的齿形。

(4)刀具设计及带轮误差计算与分析

通常带的模具和带轮靠滚刀滚切而成, 在带与轮齿形确定后给定带与轮的齿数,本 软件即可以图形和坐标形式输出滚刀的结构 参数,又可以输出用来加工带的模具和带轮 的滚刀齿廓齿形和坐标。

为了便于分析计算结果的误差,计算结 果采用曲线形式输出。利用曲线可分析带轮 齿数为 z_0 时设计的滚刀加工齿数(z_a , z_b)间 带轮形成的最大误差分布规律及 $\Delta(z_0,z)$ — $\Delta(z)$ 分布规律,并可确定加工模具和带轮不 产生切齿的最小齿数及加工最小齿数内带轮 时滚刀的设计方法,还可确定在给定允差条 件下刀具的可加工齿数范围。

3 应用举例

在进行带齿参数初选后,确定齿形角 α =73°,74°,75°三组参数进行强度和啮合运动 分析。在计算中为便于结果比较,取 W=1N·mm⁻¹, $\beta=-150°$ (注:图1中 $\beta=30°$,但若 取 $\beta=30°$ 代入算式,应力和位移的计算结果 总会出现一个"负"号,为使计算结果与实际 相一致,取 $\beta=30°$ 的补角 $\beta=-150°$ 代入,这 样计算结果不变,且"负"号变"正"号),H(载 荷 W 作用的位置与齿根的垂直距离) = 3.5mm。在利用 Powell 法进行映射系数计算 中,目标函数中点数 M=82。

CPM 法带齿强度计算结果如图 3 所示。



x=2.9286 mm, y=0.5145 mm, LYL=0.797 N, x=-2.9321 mm, y=0.5106 mm, YYL=-1.1419 N



x=2.9478mm, y=0.5086mm, LYL=0.7914N, x=-2.9503mm, y=0.5059mm, YYL=-1.1345N





图中应力分布中受载侧为拉应力(LYL)分 布,另侧为压应力(YYL)分布,最大拉压应力 值及坐标位置如图 3 所示,且随 α 增大拉压 应力最大值减小。

利用啮合原理计算的运动啮合条件如图 4 所示。从图中可以看出,设计带轮与计算带 轮(与带共轭轮)齿形 α=74°时运动啮合状态 最好。综合应力计算结果,选择 α=74°时的带 与轮参数的设计齿廓。

取带齿数为153,轮齿数为46,用键盘输 入齿数后就可以设计滚刀。图5为模具和带





 $\alpha = 74^{\circ}$



图 4 设计带轮与计算带轮(与带 共轭带轮)啮合关系

轮滚刀的齿形图。

图 6 所示为由齿数 z₀ 设计滚刀来加工 带轮所形成的误差分布曲线。显然,加工齿数 范围大,则误差也大。由误差分布及对传动的 影响得出:设计滚刀齿数 z₀≥40 时,若用来 加工齿数 z≤40 轮则对传动有影响。模具与 带轮最小齿数分别为 z_数=23,z_轮=21,小于 最小齿数轮的加工采用负变位刀具设计法。 变位量及可加工齿数如附表所示。

用弹性模量 E = 10N · mm⁻², 泊松比 ν = 0.5 的 CR 设计的带齿在载荷作用下的变 形如图 7 所示。为便于分析, 齿廓变形量放大 了 1.5 倍。从变形图可以看出, 主要变形发生 在齿顶部, 而且变形量较大, 这是由于 E 值 小的缘故。



 $1-z_0=20; 2-z_0=40; 3-z_0=60; 4-z_0=80$

变位量 △	最小齿数 <i>z</i> 模	最 小齿数	
0	22.0842	20. 4492	
0.2	20.1052	18.4722	
0.4	18.4706	16.4913	
0.6	16.4913	14.5123	
0.8	15.1877	14.5100	
1.0	13.5087	_	



图 7 带齿顶受集中载荷时的带齿变形



步带与带轮设计是复杂、重复的求解过程,利 用计算机编程求解,可使求解更准确、更迅 速。

(2)带齿强度计算中,对解映射函数系数 采用分段目标函数,提高了映射精度。用 CPM 法进行带的应力和变形计算比 FEM 法所占内存更少,求解过程更简便。

(3)RHDGRAPH 软件具有系统性和完整性,适合于工程设计与应用。

参考文献

- 1 Koyama T *et al.* A study on strength of toothed belt. Bull JSME, 1979; 22:988
- 2 Koyama T *et al.* A study on strength of toothed belt. Bull JSME, 1980; 23; 1325
- 3 Gardou A and Tordion G V. Numerical implementation of complex potentials for gear tooth stress analysis. ASME Journal of Mechanical Design.1981;103(2):460-465

收稿日期 1996-03-05

Application of Computer to Study on Driving Power of Synchronous Belt with Parabola Teeth

Jiang Hongyuan, Guan Li, Guo Jianhua, Chen Tieming and Xu Puzi (Haerbin University of Technology 150001)

Abstract Based on the combination of the mesh principle with the complex analysis of elastic mechanics, a systematic study was made on the driving power of the synchronous belt with parabola teeth using computer. The whole calculation process was programmed into RHDGRAPH software. The software was used in the tooth design of belt, wheel and cutting tool, the analysis of mesh principle, the calculation of stress-strain, the determination of the minimum processible tooth number of cutting tool and the calculation of the distribution of process error.

Keywords synchronous belt with parabola teeth, CAD, complex analysis

征订通知

"第九届全国轮胎技术研讨会论文集"尚有部分余书,有订阅者请向《橡胶工业》《轮胎工业》编辑部索取订单。每本订价200元,存书不多,欲购从速。联系人:张川。

《橡胶工业》《轮胎工业》编辑部 1996年8月