

充气轮胎力学的发展

Grigolyuk E. I. 著 何晓玫译 涂学忠校

充气轮胎是目前最广泛应用的具有商业价值的复合结构产品。制造具有高技术 and 经济指标的充气轮胎,要求在轮胎设计阶段仔细研究其强度,然后为不同载荷条件的轮胎精心开发数学模型、计算方法和计算机程序^[1,2]。必须强调的是,只有以专门提出的理论为基础才能令人满意地解决充气轮胎强度问题,同时,必须考虑到应力-应变领域的空间特性、轮胎中各向异性 and 几何非线性的影响。这些特性和影响目前已可用具有复杂形式的多层壳元来模拟^[3]。这种壳元的参照面是由在平面内离散数据点得到的随机曲线旋转形成,点坐标具有随机测量误差。

1 根据帘线-网格理论分析充气轮胎

早期根据网格理论对轮胎进行的分析已有文献报道^[4-6],因此这里不详细介绍。

尽管早在1931年Haas和Dietzius^[7]的专著中已阐述了与飞艇制造的改进有关的网格理论,然而该理论直到不久前才应用于充气轮胎的充气轮廓方面最简单的问题的研究^[8-10]。

我们研究一下网格理论的基本原理。旋转充气压力 q 下无量纲壳元得到的基本方程可表示为下面形式^[8-10]:

$$\frac{T_{11}^*}{R_1^*} + \frac{T_{22}^*}{R_2^*} = q$$

$$T_{11}^* = \frac{(y^*)^2 - (y_0^*)^2}{2y^* \cos \alpha^*} q \quad (1)$$

$$\frac{T_{22}^*}{T_{11}^*} = \operatorname{tg}^2 \gamma_c^*$$

式中 T_{11}^*, T_{22}^* —— 子午向和圆周方向上的应力总和;

R_1^*, R_2^* —— 子午向和圆周方向上的曲率半径;

y^* —— 旋转轴到给定点的距离;

y_0^* —— 旋转轴到轮廓最宽点的距离,一般来讲它平行于旋转轴;

α^* —— 切向和旋转轴方向之间的夹角;

γ_c^* —— 帘线和子午线方向之间的夹角。

在右上角有符号*的数值与轮胎的变形轮廓有关。将 $y_0^* = 0$ 代入方程组(1),我们可以推

copolymer (ECO)/nitrile butadiene rubber (NBR) blend were studied. The result showed that with the increase of the content of ECO the low temperature resistance, the thermooxidative aging resistance and the tetrachloromethane or chloroform resistance of the blend improved significantly, but the tensile strength decreased; the maximal tensile strength and tear strength of the ECO/NBR(60/40) blend were obtained when 1.5 phr of accelerator NA-22 and 60 phr of semi-reinforcing furnace black were used. When the liquid NBR was used as softener, the low temperature resistance, resiliency, tear strength, elongation at break and oil resistance of the blend improved, but the thermooxidative aging resistance and the tetrachloromethane or chloroform resistance decreased.

Keywords ECO, NBR, blend, accelerator NA-22

出 Haas-Dietzius 的网格理论的初始方程^[7]。上面提到的限制明显地与飞艇的形状有关，因为它的轮廓最宽点落在旋转轴上。

尽管存在某些缺点，例如，忽略了轮胎的弯曲和橡胶补强效应，对层合结构(它的数量必须是偶数，排列方式相同，且由相同材料组成)的力学和几何特性方面有限制，但是帘线网格模型仍然可以具有确定某些斜交轮胎的充气轮廓所需的精度。

2 根据 Kirchhoff-Love 理论分析充气轮胎

当帘线网格模型应用到飞机轮胎的研究经常导出不可接受的结论已经是非常清楚的时候，研究人员把注意力集中到充气轮胎的高精度新数学模型的完善方面。不久创立了以正交各向异性壳元的无量纲 Kirchhoff-Love 理论为基础的斜交轮胎薄膜模型^[11-13]。它们不仅允许考虑橡胶的影响，而且还可以考虑到帘线-橡胶层力学和几何特性的差异。

由斜交轮胎向子午线轮胎转换，要求对子午线轮胎计算模型加以完善。显然这类模型首先是在参考文献 12 和 14 中建立的，其中子午线轮胎用无量纲壳元模拟，壳元胎面部分是由两层模拟带束层和胎体的帘布组成，胎侧部分只有一层胎体帘布(见图 1，略)。因为不能处理载荷和材料性能的不连续性，所以这类薄膜模型的缺点是明显的。

Brewer 取得了相当大的进步^[5]，他应用多层正交各向异性壳元的几何非线性 Kirchhoff-Love 理论模拟轮胎。他认为按照运动学的 Kirchhoff 假设，位移在厚度方向上的分布为：

$$\begin{aligned} u_i^{(k)} &= u_i + z\theta_i \\ u_3^{(k)} &= w \end{aligned} \quad (2)$$

$$\theta_i = R_i^{-1}u_i - A_i^{-1}\partial w/\partial \alpha_i$$

式中 $u_i^{(k)}, u_3^{(k)}$ —— 第 k 层($k=1, 2, \dots, N; i=1, 2$)的切向和横向位移；

u_i, w —— 轮胎参照面上的切向和横向位移；

α_i —— 参照面上的曲线的垂直坐标；

z —— 垂直于参照面的坐标；

R_i, A_i —— 主要曲率半径和参照面 Lamé；

N —— 轮胎总层数。

3 根据一阶 Timoshenko-type 理论分析充气轮胎

显然，在文献 16 和 17 中首次得出了考虑到横向剪切应变的充气轮胎的分析结果。在文献 16 中，用无量纲的均匀的横向各向异性壳元模拟子午线轮胎的胎侧，胎面部分由复合夹层壳元模拟，该壳元由两层模拟带束层和胎体帘布的正交各向异性薄膜层以及它们之间的橡胶芯层组成(见图 1，略)。这样的轮胎模型可以近似地计算带束层帘布和胎体帘布之间部位的层间剪切应变。

根据多层各向异性(非正交各向异性的)壳元的几何非线性的一阶 Timoshenko-type 理论完善了更精确的轮胎计算模型^[16,17]。该理论依据 Timoshenko 假设：

$$\begin{aligned} u_i^{(k)} &= u_i + z\beta_i \\ u_3^{(k)} &= w \end{aligned} \quad (3)$$

此外，假定与其它应力相比横向垂直应力可以忽略不计，即 $\sigma_{33}^{(k)} \ll \sigma_{ij}^{(k)}$ ， $\sigma_{33}^{(k)}$ 沿着轮胎厚度方向上的横向剪切应力的分布可以表示为：

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{(k)} &= \bar{N}_k(z)\tau_i^{(k-1)} + N_k(z)\tau_i^{(k)} + f_k(z)\mu_i^{(k)} \\ N_k(z) &= (z - \delta_{k-1})/h_k \\ \bar{N}_k(z) &= (\delta_k - z)/h_k \\ f_k(z) &= 6N_k(z)N_k(z)/h_k \end{aligned} \quad (4)$$

式中 $\tau_i^{(k)}, \tau_i^{(k-1)}$ —— 第 k 层($k=1, 2, \dots, N; i=1, 2$)顶部和底部的横向剪切应力；

$N_k(z), \bar{N}_k(z)$ —— 第 k 层的形状函数；

h_k —— 第 k 层的厚度；

δ_k ——从参照面到第 k 层上表面的距离。

函数 $\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(N-1)}, \mu_i^{(k)}$ 是未知函数, 它们依赖于曲线坐标 α_1 和 α_2 , 并且可以根据三维领域 Reissner 混合的变分原理用运动学变量 u, w 和 β_i 表示。

后来的研究^[20]把轮胎的计算模型扩展到在不增加基本微分方程组阶次的条件下就可以确定横向垂直应力 $\sigma_{33}^{(k)}$ 。这种方程组的阶次与 N 无关, 等于 10。与文献 18 轮胎模型相同, 采用了横向位移的 Timoshenko 假设, 即 $u_3^{(k)} = \tau w + z\gamma$ 。

4 根据二阶 Timoshenko-type 理论分析充气轮胎

如文献 1 和 21 所述, 利用多层各向异性壳元的几何非线性二阶 Timoshenko-type 理论可以建立综合的轮胎计算模型。根据方程组(4)和概括的 Timoshenko 假设^[22], 人们认为沿着厚度方向分布的横向剪切应力和位移为:

$$\begin{aligned} u_i^{(k)} &= u_i + z\theta_i + g(z)\psi_i \\ u_3^{(k)} &= w \end{aligned} \quad (5)$$

式中 $g(z)$ —— z 的事先选择的连续函数;

z ——切向位移的非线性厚度分布。

这一假设与 Timoshenko 假设(3)不同, 可以描述切向应力和应变对厚度坐标 z 的非线性依赖性。这对于计算带束层边缘区域的应力-应变尤其有效。

通过应用三维 Reissner 混合变分原理得出非线性基本微分方程。如果充气轮胎是轴对称变形, 应用改进的 Newton 方法, 将非线性边界问题简化为一系列线性边界问题^[1]。线性边界问题可以通过数值积分的 Godunov 方法求解^[1]。

应当提到, 我们考虑了充气轮胎的各向异性使充气轮胎分析复杂化的影响, 因为在这种情况下我们必须积分基本组非线性微分方程, 其阶次为 12。根据多层正交各向异性

壳元的二阶 Timoshenko-type 理论进行相同的轮胎分析导致了积分的基本方程组减小, 其阶次为 8。

5 根据一阶分离层理论分析充气轮胎

上述方法也可用于建立利用多层各向异性壳元的几何非线性分离层理论的轮胎计算模型^[1,23]。这个理论的基础是在厚度方向上切向位移的独立静态逼近值(4)和逐段线性逼近值, 它可以表示如下:

$$\begin{aligned} u_i^{(k)} &= u_i + \sum_{n=1}^{k-1} h_n \beta_i^{(n)} \\ &+ (z - \delta_{k-1}) \beta_i^{(k)} \end{aligned} \quad (6)$$

式中 $\beta_i^{(k)}$ ——第 k 层的旋转分量。

通过 Reissner 混合变分原理得到基本非线性微分方程组。方程组的阶次取决于层数, 等于 $4N+6$ 。它可以满足轮胎厚度方向上横向应力分布的复杂特性的要求。

在后来的文献^[24,25]中, 提出了不增加基本微分方程组的阶次, 就可以确定横向垂直应力 $\sigma_{33}^{(k)}$ 的新轮胎计算模型。和文献 23 中的轮胎模型一样, 对横向位移 $u_3^{(k)}$ 也可采用逐段线性逼近值。

6 根据二阶分离层理论分析充气轮胎

利用多层各向异性壳元的几何非线性二阶分离层理论可以获得更精确的轮胎计算模型^[26,27]。假设横向剪切应力和切向位移在厚度方向上是按照方程组(4)和逐段线性逼近值分布的:

$$\begin{aligned} u_i^{(k)} &= u_i + z\theta_i + \sum_{n=1}^{k-1} (\zeta_n - \zeta_{n-1}) \psi_i^{(n)} \\ &+ [g(z) - \zeta_{k-1}] \psi_i^{(k)} \end{aligned} \quad (7)$$

式中 $\zeta_n = g(\delta_n)$ ($k=1, 2, \dots, N; n=0, 1, \dots, N-1$);

$g(z)$ ——如第 5 条所述。

逐段线性逼近值具有足够的通用性。因此, 把 $g(z) = z$ 和 $\psi_i^{(k)} = \beta_i^{(k)} - \theta_i$ 代入(7), 我们可得到逐段线性逼近值(6)。如果我们再假

设在(6)中, $\beta_i^{(k)} = \beta_i$, 那么我们可以推出运动学 Timoshenko 假设(3)。将 $\phi_i^{(k)} = \phi_i$ 和 $\zeta_0 = 0$ 代入(7), 我们得到广义的 Timoshenko 假设(5)。如果我们另外假设(5)中 $\phi_i = 0$, 我们会得到 Kirchhoff 假设(2)。

应用 Reissner 混合变分原理也可以得到基本非线性微分方程。基本方程组的阶次取决于层数, 等于 $4N+8$ 。

对充气轮胎中正交各向异性和几何非线性对应力-应变区域综合分析的分析是最重要的。在文献 27 中对此进行了分析, 用 4 层各向异性环状壳元模拟斜交轮胎, 壳元的均匀充气压力 $q = 1.5\text{MPa}$ 。假设各层材料具有低模量帘线-橡胶复合材料的典型特性^[27]。壳元底表面的几何特性是 $R_1 = 50\text{mm}$, $R_0 = 250\text{mm}$ 和 $h = 4.8\text{mm}$ (参见图 2)。假设帘线取向是 $\gamma_k = (-1)^{k-1} \cdot 52^\circ$ 、帘布厚度 $h_k = 1.2\text{mm}$, 式中 $k = 1, 2, 3, 4$ 。假定壳元刚性地固定在轮辋上(角度 $\Phi = \pm 120^\circ$)。对基本非线性微分方程组进行积分可以得出图 3 所示的结果, 方程组的阶次为 24。图 3 所示的厚

度方向上的横向剪切应力的分布是根据在 $\Phi = 60^\circ$ 的横断面上的非线性解(实线)和线性解(虚线)求得。在应力 σ_{13} 和 σ_{23} 的阶次相同时, 必须注意的是非线性问题。它甚至表明斜交轮胎中各向异性和几何非线性对应力区域的主要影响。

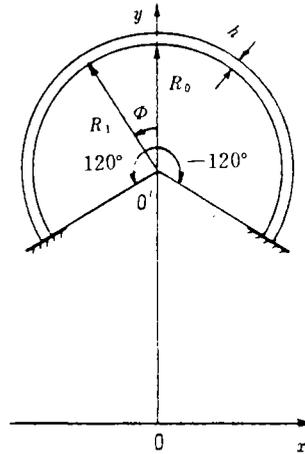


图 2 4层各向异性壳元

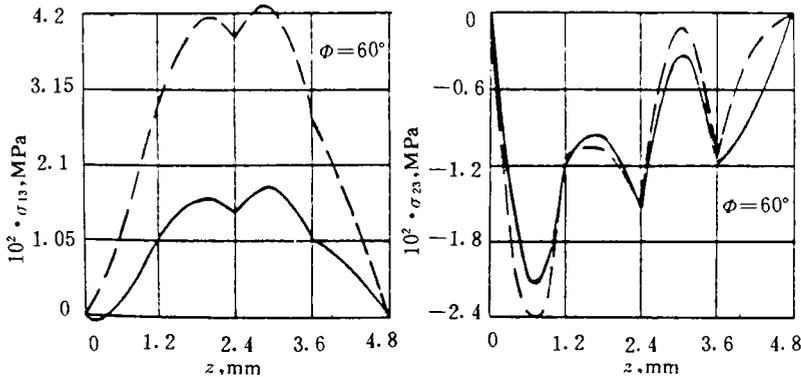


图 3 $\Phi = 60^\circ$ 壳元厚度上横向剪切应力的分布(实线和虚线分别代表根据非线性和线性理论求的解)

译自“1994 年莫斯科国际橡胶会议论文集”, 第 4 卷, P64—70

参考文献(略)