

轮胎中扩散反应的有限元分析

N. W. Nelson *et al.* 著 薛虎军译 刘大众校

轮胎制造者对改进轮胎的长期使用性能有着相当大的兴趣。这种愿望的结果之一是最近开发了使用寿命达 128720km 的轿车轮胎。逐步加速和逐步加载之类的快速耐久性试验是测定轮胎寿命的常用方法。然而,由于试验是加速进行的,不能完全反映轮胎的长期性能。透过气密层和帘布层而扩散的氧气造成了胎内的氧化反应^[1],逐步导致了内部部件材料的老化,其中的关键部位是带束层边缘,因为它要经受反复屈挠和生热。

关于轮胎胶料,特别是带束层隔离胶的老化特性及其与轮胎耐久性的关系,人们已作了研究^[2,3]。Tokita^[4]等根据轮胎部件的氧化特性开发出了有限差分模型预测使用寿命。他采用有限差分法解决了稳态下扩散氧化反应的平面问题。这一研究工作把浓度作为主要变量,并假定氧化是一级反应直接求解稳态扩散-氧化方程。该工作应用极坐标描述轮胎曲面,通过平面有限差分法将问题离散化。由于溶解度的差别,通常胎体帘布层边界处氧的浓度是不连续的。然而对于稳态状况,通过帘布层边界的任何流量差别都可归因于氧化。Tokita 利用这一条件建立了帘布层边界节点的流量平衡方程。

为了避免使不连续变量复杂化,本文对基本方程进行了改进,以压力作为主要变量。本文将讨论改进基本方程和使用有限元使之离散化的方法,以及所获得的一些初步结果。已开发的 Femoxi 有限元程序能够解决扩散反应的瞬态、平面、二维和二维轴对称问题。所开发的其它软件可以应用数字化仪和商业有限元模型数据以及后处理程序。整个系统可在微机上运行,目前正在用于研究轮胎的氧化扩散反应。预测轮胎寿命的模型,目前正在初步证实,此处将作简要讨论。这一软

件系统也可用于研究空气的扩散,以预测轮胎内压和用于研究湿气的扩散及随后与钢丝帘线的反应。

1 基本方程

为便于应用,开发了平面和二维轴对称坐标的基本方程,如图 1 所示。

下面叙述图 1 所示的 X-Y 坐标体系平面问题的基本微分方程。图 1 中轴对称特性方程的建立将在介绍有限元方程时讨论。为了建立有限元方程,假定在给定的任一有限元上扩散系数均为常数(一个单元在平面问题中可作为单位厚度的结构小块,而在轴对称问题中可作为轮胎截面上的环状条带)。

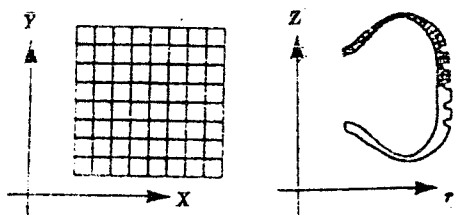


图 1 Femoxi 所用的坐标系

由于某些轮胎的帘布层具有强烈的方向性,可将其作为帘线方向和与之垂直方向的正交各向异性材料来处理。因为有限元的解是基于 X-Y 或 r-Z 平面而言的,必须提供扩散张量在非主坐标系中的非对角线项。进一步假定氧化反应受一级速率方程控制。根据这些假设,可给出轮胎中扩散-氧化的基本方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} = & D_x \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \right) + D_{xy} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} \right) + \\ & D_{yx} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial y \partial x} \right) + \\ & D_y \left(\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) - kC \end{aligned} \quad (1)$$

式中 C——浓度;

D_x, D_{xy}, D_{yx}, D_y ——扩散张量的分量;

k ——一级反应速率常数;

t ——时间。

假定扩散张量和反应速率常数与浓度无关。对于正常压力, Van Amerongen^[5]证实了如果只有少量气体被橡胶吸收,那么扩散系数为常数这一假设。可以认为,同样的论证可以延伸到反应速率常数。

采用有限元直接求解方程(1)具有一定困难。由于不同帘布层对氧具有不同的溶解度,轮胎中帘布层边界处氧的浓度是不连续的。因此,为了使有限元离散化,重新改进了方程(1)。所建立的有限元模型能使每一个有限单元只包含一个橡胶部件,基于这一假设,在任何一个单元内的氧溶解度都是常数。如果考虑 Henry 方程 $P=C/S$, 式中 P 是氧气压力, S 是溶解度。将方程(1)中的每一项除以单元溶解度后可得到:

$$\begin{aligned} \partial^2 P / \partial x^2 = & D_x (\partial^2 P / \partial x^2) + D_{xy} (\partial^2 P / \partial x \partial y) + \\ & D_{yx} (\partial^2 P / \partial y \partial x) + D_y (\partial^2 P / \partial y^2) - kP \end{aligned} \quad (2)$$

对于轮胎中的大多数问题,平衡时间与初始气压条件下的扩散之间的关系,与长期耐久性的相关性非常小。在这种情况下,我们可以取 $\partial P / \partial t = 0$ 。因此,方程(2)的稳态方程为:

$$D_x (\partial^2 P / \partial x^2) + D_{xy} (\partial^2 P / \partial x \partial y) + D_{yx} (\partial^2 P / \partial y \partial x) + D_y (\partial^2 P / \partial y^2) - kP = 0 \quad (3)$$

基于上述假设,方程(2)和(3)是方程(1)的改进形式,它在任何有限单元体上均是有效的,适合用有限元法求解。因为轮胎帘布层的压力变量是连续的,这些方程适用于求解问题的全范围,即适用于轮胎中全部有限单元的组合。

为了计算轮胎截面上的任何一点的反应程度,使用了有限元程序的压力计算结果。对于瞬态情况的方程(2),压力结果由 Femoxi 程序在求解问题的一系列时间步长上计算出来。反应的程度由下式给出:

$$kS \int_0^t P(t) dt = A \quad (4)$$

它是一个数值积分。

方程(4)中, A 代表已发生了的反应程度。例如,根据使用的单位,在时间 t 时的 A 值可用每 mm^3 橡胶中反应的氧摩尔数表示。如果反应掉的氧气量的临界值可以通过实验确定,则方程(4)可用于预测由于老化反应引起的轮胎破坏。

如前所述,对于大多数轮胎问题,似乎都可以看成是稳态的。对于稳态问题,反应程度 A 可以表示为:

$$A = kSPt \quad (5)$$

使用氧化临界值,方程(5)可重新写成:

$$t_c = A_c / kSP \quad (6)$$

式中 A_c —— A 的临界值;

t_c ——达到临界值的时间。

2 扩散常数的确定

扩散常数有时可用渗透性实验确定。对于正交各向异性材料,基本扩散常数 D_i 可表示为:

$$D_i = P_i / S \quad (i=1, 2) \quad (7)$$

式中 P_i 为所测得的渗透率,下标 1 和 2 表示主方向。可以认为,当反应速率相对于扩散速率较小时,方程(7)是有效的。这种情况正是我们研究中所遇到的,图 2 示出了有限元程序 Femoxi 所完成的有限元结构。在这些单元中,数字编号的小圆点称为节点。 $X-Y$ 和 $r-Z$ 坐标系称为总体坐标系。 $x-y$ 坐标系称为局部或单元坐标系。通过离散轮胎帘线方向上的单元,图 2 所示的局部 $x-y$ 坐标系将与扩散张量的主方向一致。因为材料性能独立地包括在每个单元中,扩散系数包括在局部单元坐标中,只有方程(7)确定的主扩散系数需要输入到程序中。局部 x 坐标的方向可由单元节点顺序号确定。这被称为布尔规则。例如,图 2 中连通序列 1-2-3-4 决定了局部 x

的方向(1-2方向)。局部 y 方向与局部 x 方向按逆时针方向成 90° 角。

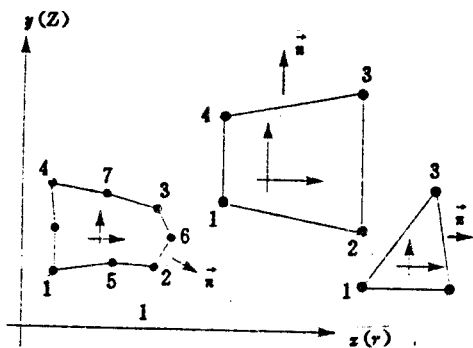


图2 可用于 Femoxi 的有限单元

3 基本方程的变换公式

通过首先建立方程(3)的变化式,阐明有限元程序。通过使用标准的时间相关方程的有限差分法可求解方程(2)的瞬态问题^[6]。这些方法是众所周知的,故本文不做进一步讨论,目前只研究稳态扩散-氧化问题。

使用标准的有限元程序^[6],将方程(3)乘以试验函数 V ,并在单元面积 A_r 上进行积分(我们已假定单元厚度是均匀的)。这将使得对变量 P 的一阶偏微分转变为对变量 V 的一阶偏微分,并得到方程(3)的变分形式:

$$\int_{A_r} [D_x(\partial V/\partial x \cdot \partial P/\partial x) + D_{xy}(\partial V/\partial x \cdot \partial P/\partial y) + D_{yx}(\partial V/\partial y \cdot \partial P/\partial x) + D_y(\partial V/\partial y \cdot \partial P/\partial y) - kVP] dx dy - \oint V q_n ds = 0 \quad (8)$$

式中, q_n 是围绕单元边缘处的通量。

$$q_n = N_x [D_x(\partial P/\partial x) + D_{xy}(\partial P/\partial y)] + N_y [D_{yx}(\partial P/\partial x) + D_y(\partial P/\partial y)] \quad (9)$$

式中 N_x 和 N_y 是外法向矢量 $\vec{n}$ 的分量,如图2所示。这里, ds 的符号取决于沿单元边缘的边界增量的正负。变量 q_n 是待解决问题的扩

散流量如氧流量的向外通量。轮胎单元全部组合连接在一起,因此除了在外边界,所有流量均忽略不计。

4 x-y 坐标有限元方程

接下来,用有限单元上的形函数展开变量压力 P ^[6]。这些形函数 N_i 具有以下性质,即当 $i=n$ 时, $N_i=1$ (其中 n 为节点号),而对其余节点, $N_i=0$ 。为了说明之,图3示出了4节点等参四边形的4种形函数^[7]。该等参四边形是 Femoxi 程序中的一种单元结构。

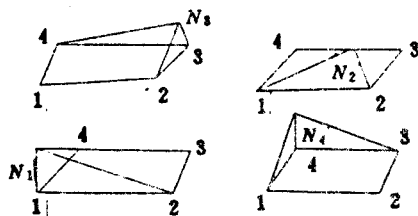


图3 4节点四边形单元的形函数

以这种方式表示 P ,我们将得到:

$$P(x, y) = \sum_{j=1}^n P_j N_j \quad (10)$$

式中 $P(x, y)$ ——单元内部的插值;

P_j ——节点 j 的压力值;

N_j ——形函数在节点 j 处的值;

n ——单元内的节点数目。

如前所述,假定扩散张量是对称的,即 $D_{xy}=D_{yx}$ 。据此,将方程(10)代入变分形式的方程(8)可得到方程(11):

$$\sum_{j=1}^n \left\{ \int_{A_r} [D_x(\partial N_i/\partial x)(\partial N_j/\partial y) + D_{xy}(\partial N_i/\partial x)(\partial N_j/\partial y) + D_{yx}(\partial N_i/\partial y)(\partial N_j/\partial x) + D_y(\partial N_i/\partial y)(\partial N_j/\partial y) - k N_i N_j] dx dy \right\} P_j - \oint N_i q_n ds = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (11)$$

也可以将方程(11)写成:

$$\sum_{j=1}^n K_{ij} P_j = f_i \quad (12)$$

式中,

注: * 原文如此,应为 x ;

* * 原文如此,应为 y ——编者。

$$K_{ij} = \int_{A_r} [D_x (\partial N_i / \partial x) (\partial N_j / \partial x) + 2D_{xy} (\partial N_i / \partial x) (\partial N_j / \partial y) + D_y (\partial N_i / \partial y) (\partial N_j / \partial y) - k N_i N_j] dx dy \quad (13)$$

$$f_i = \oint_i N_i q_n ds \quad (14)$$

5 等参数有限元方程

下面讨论从 X - Y 总体坐标系向自然坐标系 ξ - η 的转换。 ξ - η 坐标原点在单元的中心,其 ξ 和 η 的取值范围在 $+1$ 与 -1 之间。

现将方程(11)转换,从对 x - y 积分变为对自然坐标 ξ - η 的积分。如果像图 2 所示那样,单元具有不规则边界,要对方程(11)进行积分将是困难的,所以必须做这一转换。通过把 X - Y 总体坐标系的单元表示成图 4 所示的 ξ - η 空间的主单元可实现这一转换。主单元为方形,各个角的坐标位于 $+1$ 与 -1 之间。这简化了后续的数值积分。

为了完成这种转换,采用与方程(10)中

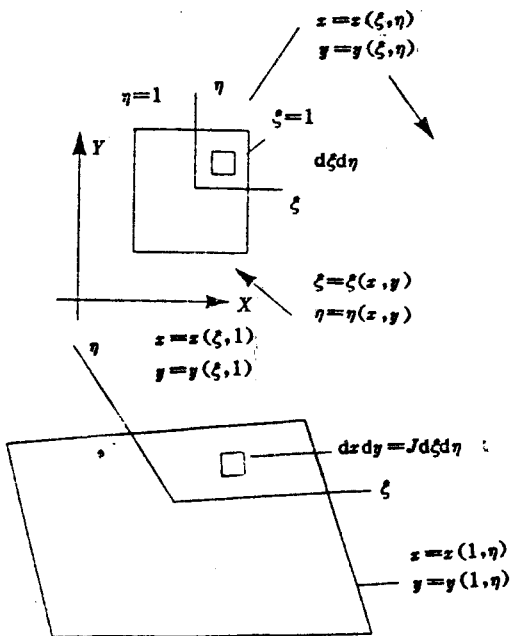


图 4 X - Y 空间与 ξ - η 空间的关系

处理压力 P 时所用的相同的形函数展开 x 和 y 。于是可得到

$$x = \sum_{i=1}^n x_i N_i \quad y = \sum_{i=1}^n y_i N_i \quad (15)$$

等参数这一名称正是由于压力和几何形状的插值函数采用了相同的形函数而得来。方程(16)可以表达采用 ξ - η 坐标的形函数 N_i 的偏微分。下面给出方程(11)中的单元面积项:

$$dxdy = J d\xi d\eta \quad (16)$$

式中 J 称为 X - Y 与 ξ - η 之间转换的雅各比行列式。它是雅各比矩阵 $[J]$ 的行列式。

$$[J] = (\partial x / \partial \xi) (\partial y / \partial \xi) (\partial x / \partial \eta) (\partial y / \partial \eta) \quad (17)$$

接下来,用 $*$ 定义 $[J]$ 的逆矩阵的元素。

$$(J_{11}^* / J_{21}^*) (J_{12}^* / J_{22}^*) = [J]^{-1} \quad (18)$$

据此,形函数的导数可按方程(19)用 ξ - η 表示出来:

$$\begin{cases} \partial N_i / \partial x \\ \partial N_i / \partial y \end{cases} = \begin{cases} J_{11}^* \partial N_i / \partial \xi + J_{12}^* \partial N_i / \partial \eta \\ J_{21}^* \partial N_i / \partial \xi + J_{22}^* \partial N_i / \partial \eta \end{cases} \quad (19)$$

使用方程(16)和(19),方程(13)可用局部 ξ - η 坐标进行积分:

$$K_{ij} = \int_{A_r} [D_x J_{11}^* (\partial N_i / \partial \xi) + J_{12}^* (\partial N_i / \partial \eta) J_{11}^* (\partial N_j / \partial \xi) + J_{12}^* (\partial N_i / \partial \eta) J_{21}^* (\partial N_j / \partial \xi) + J_{22}^* (\partial N_i / \partial \eta) + D_y J_{21}^* (\partial N_i / \partial \xi) + J_{22}^* (\partial N_i / \partial \eta) J_{21}^* (\partial N_j / \partial \xi) + J_{22}^* (\partial N_i / \partial \eta) (\partial N_j / \partial \eta) - k N_i N_j] d\xi d\eta \quad (20)$$

式中的 A_r 现在变为 ξ - η 空间的面积。此刻,是在 ξ - η 空间的单位矩形上进行积分。

6 边界条件

本问题的主要变量是压力。这是基本边界条件¹⁷,必须至少对模型中的一点(节点)加以详细说明。第 2 个变量是通量 q_n ,它不必加以说明。通量是这个问题的自然边界条件¹⁷。把 Femoxi 程序用于氧化问题时,给定内部边界条件为轮胎内压的氧气压,外部

边界条件为大气压的氧气分压。轮辋部位的
压力变化为锥形递减,对称轴线上的通量边
界条件为零。

7 轴对称方程

方程(8)的轴对称模型可通过考虑上述
3种单元的一个弧度段来建立。作为一个例
子,图5示出了一个这样的轴对称单元。图5
还示出了计算方程(11)的面积分的积分点。

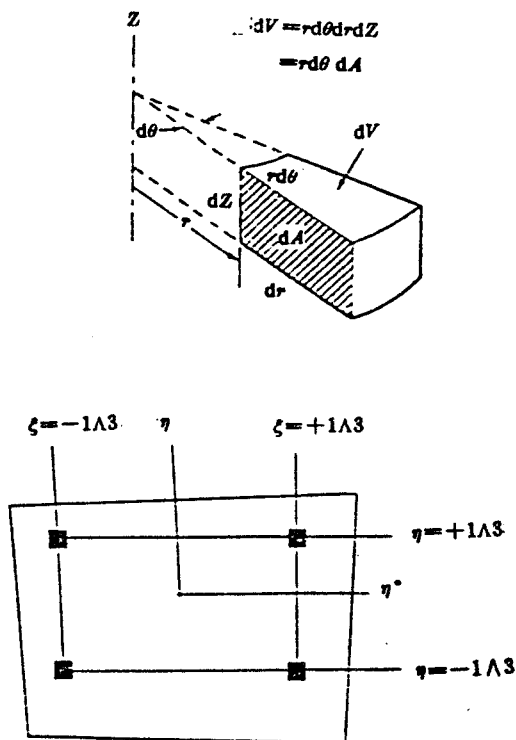


图5 轴对称4节点四边形单元

积分通常采用高斯数值积分方法完成。
因此这些积分点通常称为高斯点。对于这些
单元,必须用高斯积分点的厚度取代方程(8)
所表征的平面问题的单位厚度。对于一个弧
度段来说,这只是各个积分点所对应的半径。
在高斯点求出形函数 N_i 的导数,再与各点
相应的半径相乘。

对于3节点三角形单元,积分是封闭形
的,而不是数值积分。在这种情况下,将方程

(11)的适当项乘以单元的平均半径。平均半
径可通过定义单元的3个节点的半径之平均
值确定。

8 有限元程序 Femoxi

使用上述讨论的方法,用 Fortran 语言
编制了 Femoxi 专用有限元程序。除了单元
公式、组合、施加约束条件、求解和次级变
量的应用外,其余全部都包括了标准的有限
元技术。该程序解决了瞬态和稳态扩散问题。
无论是对平面笛卡儿坐标和轴对称坐标,用
户均可使用8节点四边形、4节点四边形和3
节点三角形单元。

还开发了连接 Femoxi 和数字化仪及商
用微机有限元前处理及后处理^[8]软件。数
字化仪通过使用轮胎断面的大幅图形或照片
来确定有限元模型中节点的位置。前处理程
序用来建立轮胎的有限元模型,它帮助输入
几何和材料数据。例如,每一个单元都可能
具有不同的性质和不同的基本扩散和反应
速率常数。后处理程序用来显示计算结果。
典型的显示结果是整个轮胎断面上的压力
分布图。

虽然软件为解决瞬态问题提供了方法,
但是这一优点尚未得到充分发挥。

9 实验数据的处理

为了使用该模型,需要知道轮胎部件的
扩散系数和氧化速率常数。初期工作集中
于几种形式的轮胎部件的空气扩散系数与
温度的关系。为了检验其有效性,模型首先
用于预测静态非氧化条件下的压力分布状
况,以确定缓冲层及胎体的平衡压力。

扩散系数采用时间滞后法计算^[9]。橡
胶薄膜所受的进气压力为 330kPa,并监测
出气压力随时间的变化直至达到稳态的压
力斜率。将稳态时的斜率外推到压力与时间
关系曲线的时间轴,其截距称为时间滞后 θ ,
相应的扩散系数可由下式给出:

$$D = L^2 / 6\theta \quad (21)$$

式中的 L 为薄膜厚度。采用这一方法,全丁

* 原文如此,应为 ξ ——编者。

基橡胶内胎和卤化丁基橡胶气密层的典型空气扩散系数为 $0.2 \times 10^{-6} \text{cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, 而黑胎侧的为 $2.5 \times 10^{-6} \text{cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ 。为了检验该模型的效果, 计算了几种轮胎胶料在不同温度下的扩散系数。

氧气扩散系数的计算目前采用另一种方法。另外, 由于空气中约含 1/5 的氧气, 因此氧气和空气的扩散系数可通过公因子相关联。

目前仍在寻找计算氧化系数和临界氧化值的合适方法。采用切片红外技术, 已取得了一些初步成果。轮胎实验表明, 在带束层边缘处氧化程度大约等于某一波长变化的 24% 时, 就会发生破坏。目前正在研究有关拉伸强度性能损失与这一特定波长的变化之间的关系。

10 典型汽车轮胎的分析

轮胎分析模型的开发采用 R. Probhakaran^[10] 方法。用于输入节点和坐标的二维轮胎材料分布图可以用手工仔细描绘, 或者是打印的。根据横截面的大小和复杂性, 模型大小在 100 和 200 个 4 节点四边形单元之间变化。这样的典型问题可在几分钟内完成。

迄今为止, 工作一直集中于使用模型预测室温下静态轮胎内的压力分布。图 6(不清, 略) 示出了两个这样的分布图, 其气密层一个为全卤化丁基橡胶, 另一个为通用橡胶。两种情况下的充气压力均为 210kPa。由于卤化丁基橡胶气密层具有抵抗空气扩散的能力, 因此胎内压力较低。这种模型可以预测诸如胎体和缓冲层承受的压力之类的重要轮胎性能, 两者均与耐久性有关。目前正在进行的工作是模拟各种轮胎的充分扩散-氧化反应。

11 结论

轮胎中的扩散反应问题可采用有限元方法解决。这种问题通常出现在有关带束层的氧化和增强钢丝的腐蚀研究中。采用有限元方法, 开发出了 Femoxi 程序这种新型计算工具。Femoxi 可在微机上运行, 于几分钟内解决这类问题。应用这种方法, 可以快速有效地评价旨在解决这类问题的各种设计方案。目前正在努力求解反应速率常数和进一步验证计算模型。

参考文献(略)

译自美国“Rubber World”, 209[1],

34—42(1993)